

# *Introduction aux Ondelettes*

Luc Claustres

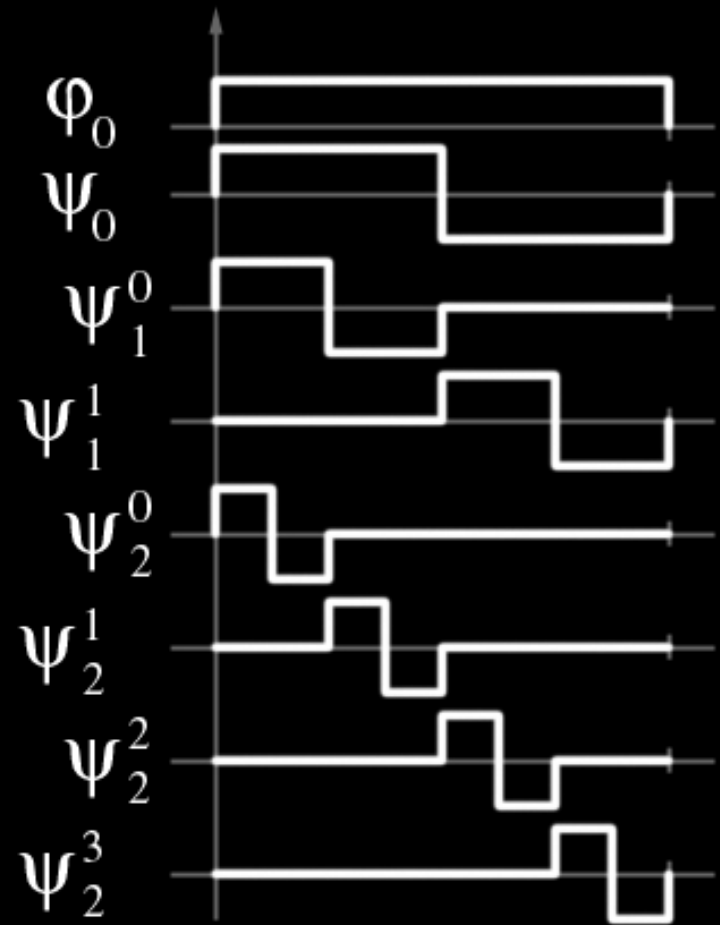
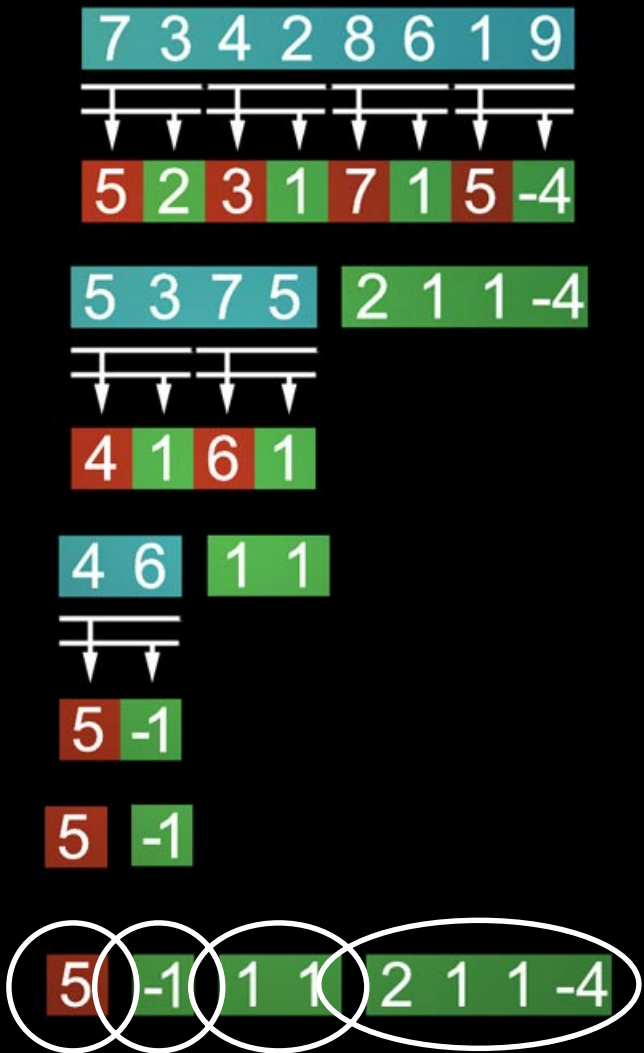
[claustre@irit.fr](mailto:claustre@irit.fr)

DESS2IN 2002-2003

# Un peu d'histoire

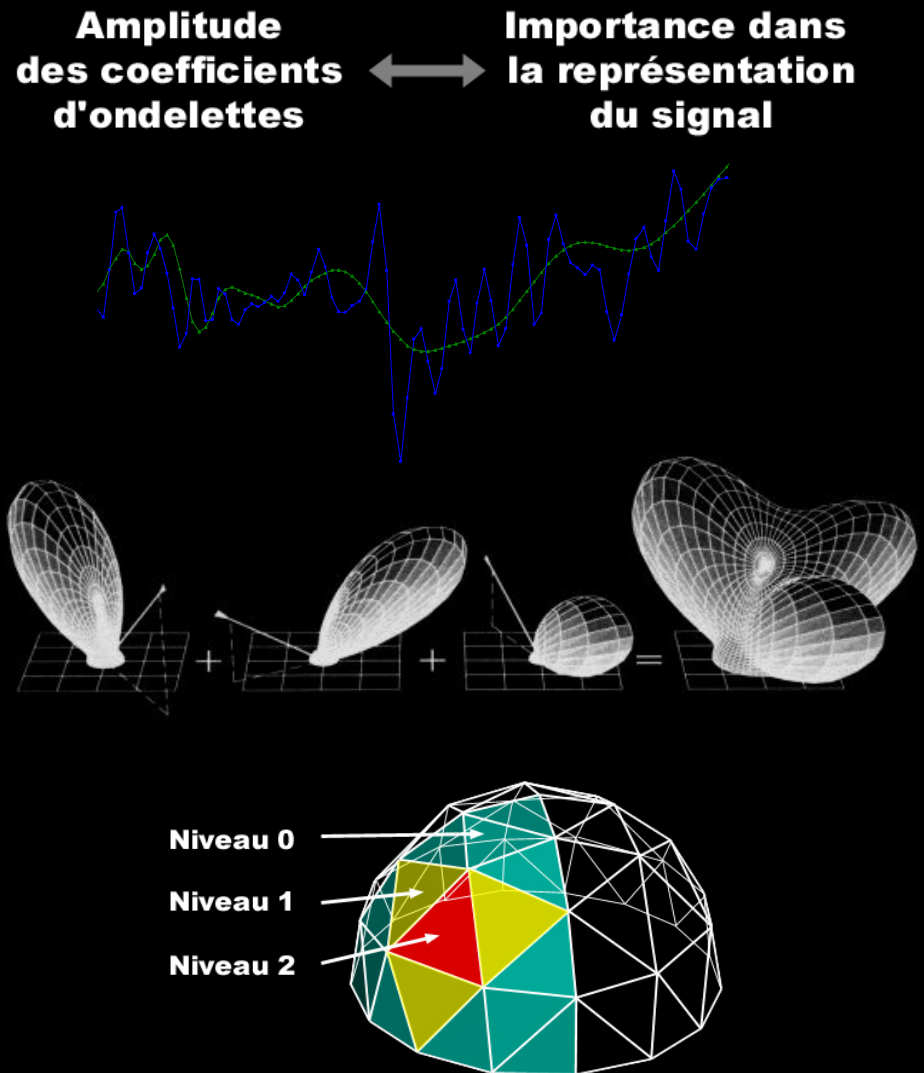
- 1805 : Analyse de Fourier
- 1965 : Transformée de Fourier rapide
- 1980 : Début des ondelettes « *ad hoc* »  
pourquoi/quand cela marche (physique, vision, parole) ?
- 1983 : Analyse d'image multirésolution (Burt)
- 1985 : Transformée continue (Morlet & Grossman)  
reconstruction sans redondance ?
- 1986-87 : Unification des travaux disparates (Mallat)
  - analyse multirésolution
  - transformée discrète
- 1988 : Classe d'ondelettes (Daubechies)
  - compactes
  - orthogonales
  - nombre de moments quelconques
- 1990 : Les ondelettes attirent théoriciens et ingénieurs, le décollage !
- 1992 : Paquets d'ondelettes (Coifman)

# Ondelettes par la pratique



Transformation finale

- Compression
- Débruitage
- Linéarité
- Multirésolution



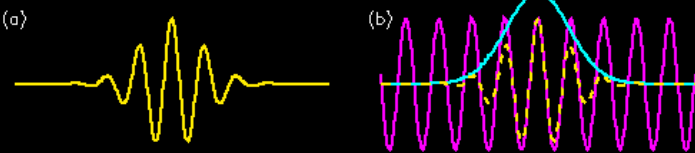
# Quelques remarques

- Pourquoi compresser ?
  - Image :  $512 \times 512 \Rightarrow 0.75\text{Mo}$  - pellicule 35mm/12 $\mu\text{m} \Rightarrow 18\text{Mo}$
  - Vidéo : 1s de PAL  $\Rightarrow 27\text{Mo}$
  - De + en + de données numériques
- Pourquoi multirésolution ?
  - Simplification des calculs
  - Transmission/Reconstruction progressive
- Pourquoi linéaire ?
  - Calculs direct sur la transformée (compressée)
- Pourquoi ça marche ?
  - Les données réelles sont généralement corrélées *localement*  
(fréquence, temps, espace)

- Une fonction est dite *ondelette* ou *ondelette mère* si

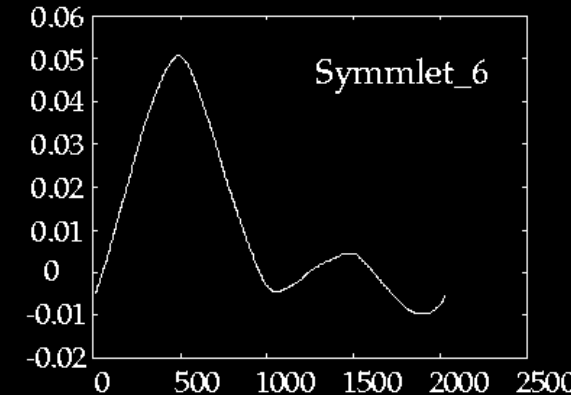
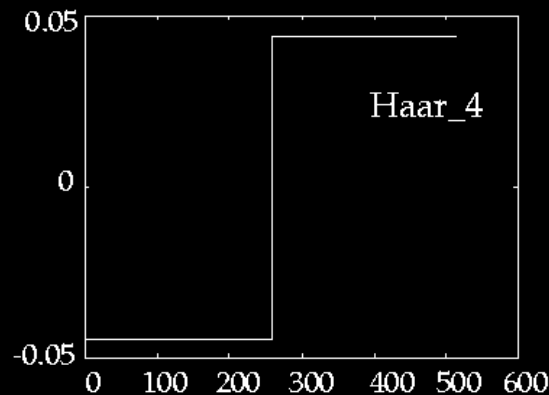
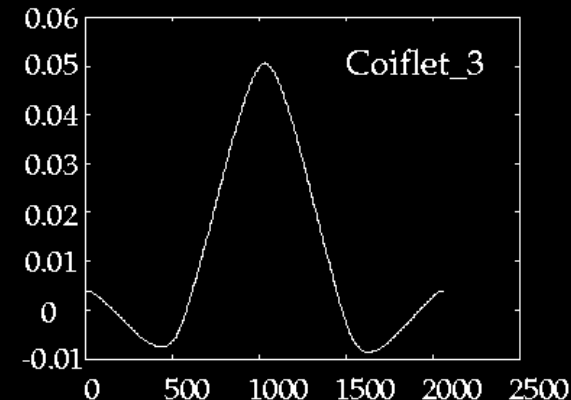
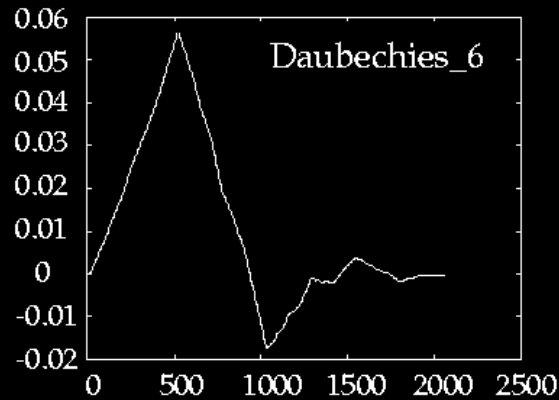
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

(ondulations)



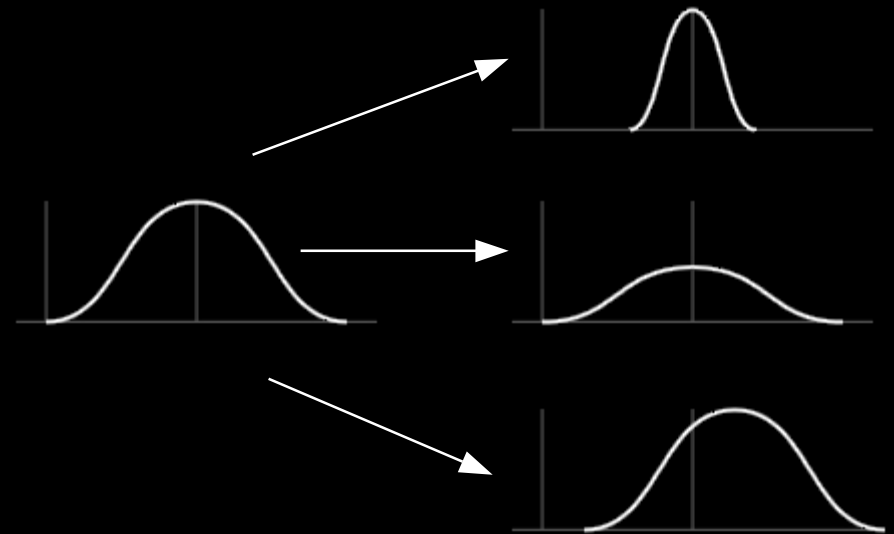
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$$

(énergie finie)



- On appelle *atomes*

$$\psi_s^u(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$



- Transformée

$$f^*(u, s) = \langle f, \psi_s^u \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) dt$$

- Transformée inverse

$$f(t) = \frac{1}{C} \int_{a=-\infty}^{+\infty} \int_{b=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|s|^2} f^*(u, s) \psi_s^u(t) da db$$

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

condition d'admission

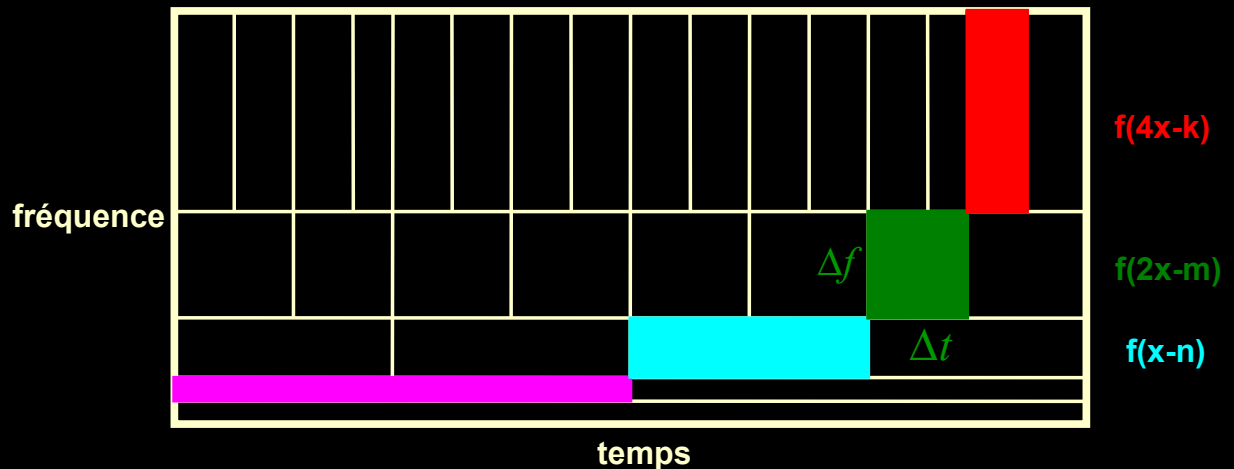
# Transformée discrète

- La transformation continue est redondante mais il est possible de reconstruire à partir de *valeurs discrètes* de  $u$  et de  $s$
- En général on utilisera un échantillonnage *dyadique*

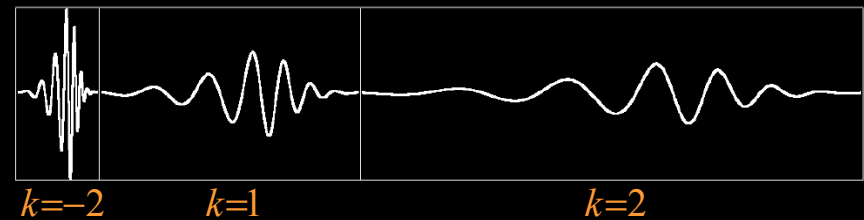
$$s = 2^k$$

$$u = 2^k l$$

$k, l$  entiers



$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2^{-k/2} d_k^l \psi(2^{-k} t - l)$$



- *Principe d'incertitude d'Heisenberg*  

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq 2\pi$$



# Espaces vectoriels linéaires

- Espace vectoriel linéaire = ensemble  $V$  muni de deux opérations

- une addition  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$
- une multiplication scalaire  $\times$  :  $R \times V \rightarrow V$

- Satisfaisant aux propriétés suivantes

$$\forall x, y \in V : x + y = y + x$$

$$\forall x, y, z \in V : x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$\exists ! 0 \in V \mid \forall x \in V : x + 0 = 0 + x = x$$

$$\forall x \in V : \exists ! -x \mid x + (-x) = 0$$

$$\forall \alpha \in R, \forall x_1, x_2 \in V : \alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$$

$$\forall x \in V : 1.x = x$$

# *Espaces vectoriels linéaires*

- Exemple d'espace vectoriel linéaire :  $\mathbb{R}^n$

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

- Sous-espace vectoriel = ensemble  $M$  tel que

$$M \subset V$$

$$\forall x, y \in M : x + y \in M$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in M : \alpha x \in M$$

- Espace vectoriel normé = espace vectoriel muni d'une fonction à valeur réelle définie sur  $V$  et notée  $\|\cdot\|$  telle que

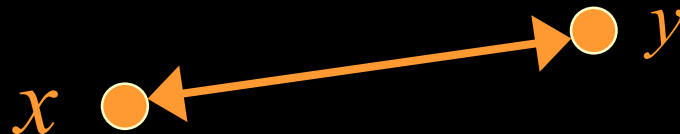
$$\forall x \in V : \|x\| > 0$$

$$\forall x \in V : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in V : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- Distance entre deux éléments ou vecteurs  $x$  et  $y = \|x - y\|$



- Exemple d'espace vectoriel normé :  $\mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \left( |x_1|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

- Différents espaces vectoriels normés pour les différentes valeurs de  $p$

- Norme  $L_1$        $\|x\| = |x_1| + \dots + |x_n|$

- Norme  $L_2$        $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

- Norme  $L_\infty$        $\|x\| = \max(|x_i|)$

- Produit scalaire = fonction  $\langle x|y \rangle: V \times V \rightarrow R$  telle que

$$\forall x, y, z \in V : \langle x|(y+z) \rangle = \langle x|y \rangle + \langle x|z \rangle$$

$$\forall x, y \in V, \forall \alpha \in R : \langle x|\alpha y \rangle = \alpha \langle x|y \rangle$$

$$\forall x \in V : \langle x|x \rangle \geq 0$$

$$\forall x \in V : \langle x|x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- Tout espace muni d'un produit scalaire définit un espace vectoriel normé en posant

$$\forall x \in V : \|x\| = \langle x|x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

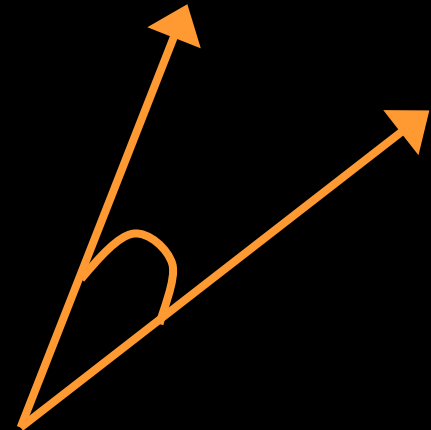
- Une telle norme vérifie l'inégalité de Schwartz

$$\forall x, y \in V : \langle x|y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

- Exemple avec  $\mathbb{R}^n$

$$\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$



- Exemple avec  $L_2(\mathbb{R})$  espace des fonctions de carré intégrable définies sur  $[a,b]$

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b fg dt$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f|^2 dt}$$

- Espace de Hilbert
  - espace vectoriel linéaire muni d'un produit scalaire dont l'espace vectoriel normé associé est *complet*
  - toute séquence d'éléments qui converge, converge vers un élément de l'espace
- Par exemple  $\mathbb{Q}$ , l'ensemble de nombre rationnels, n'est pas un espace de Hilbert

$$S_1 = 1$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e \notin \mathbb{Q}$$

- Analyse multirésolution = séquence  $V_0 \subset V_1 \subset \dots$  d'espaces de Hilbert fermés et emboîtés telle que

$$V_j \subset V_{j+1} \text{ dense dans } L_2$$

$$\bigcup_j V_j$$

$$\exists \{ \varphi_j^k, k \in K(j) \} \text{ est une base de Riesz de } V_j$$

$$K(j) \subset K(j+1)$$

- La première propriété implique l'équation de raffinement

$$\varphi_j^k = \sum_{l \in K(j+1)} h_j^{k,l} \varphi_{j+1}^l, \quad k \in K(j)$$

- Une fonction d'échelle de niveau  $j$  s'exprime comme une somme pondérée des fonctions de niveau supérieur



- Espace vectoriel des fonctions constantes par morceaux sur  $[0,1]$
- $V_j$  fonctions composées d'un ensemble de  $2^j$  intervalles

$$\left\{ \mathcal{E}_j^i = \left[ \frac{i}{2^j}, \frac{i+1}{2^j} \right], 0 \leq i \leq 2^j - 1 \right\}$$

- $V_0 =$  espace des fonctions constantes sur  $[0,1]$
- $V_1 =$  espace des fonctions à deux coefficients, constantes par

morceaux sur  $\left[ 0, \frac{1}{2} \right]$  et  $\left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$

# Analyse multirésolution

- Toute fonction de  $V_{j-1} \in V_j$ , il suffit d'affecter la valeur de la fonction sur chaque intervalle  $\mathcal{E}_{j-1}^i$  aux deux sous intervalles  $\mathcal{E}_j^{2i}$ ,  $\mathcal{E}_j^{2i+1}$
- Les fonctions carrées définies sur  $\mathcal{E}_j^i$  forment une base de  $V_j$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

$$\varphi_j^i(x) = \varphi(2^j x - i), \quad i = 0, \dots, 2^j - 1$$



- On peut projeter une fonction  $f \in V_j$  sur cette base

$$f = \sum_k a_j^k \varphi_j^k \quad , \quad a_j^k = \langle f | \varphi_j^k \rangle \quad \text{coefficients d'échelle}$$

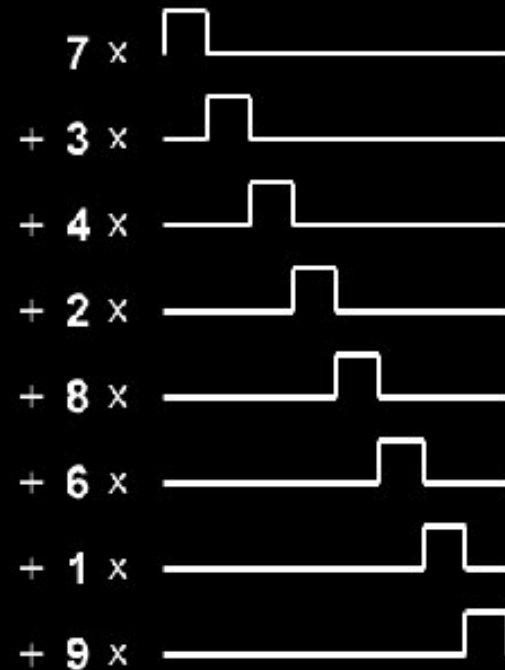
- A partir de l'équation de raffinement les coefficients de la projection pour les niveaux inférieurs se calculent
- Décomposition *hiérarchique* ou *multirésolution*
  - *approximations* de  $f$  à différents niveaux
  - comme  $V_j \subset V_{j+1}$  mais pas la réciproque, de l'information manque pour la reconstruction inverse (du + bas au + haut niveau)

# Analyse multirésolution

- Exemple des fonctions constantes par morceaux

7 3 4 2 8 6 1 9

$V_3$   
 $\Rightarrow$



- Les ondelettes encodent les *détails*

$$f = \sum_m d_j^m \psi_j^m \quad , \quad d_j^m = \langle f | \psi_j^m \rangle \quad \text{coefficients d'ondelettes}$$

- Elles forment une base  $\{ \psi_j^m , m \in M(j) \}$  du complémentaire de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$  :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

- Equation similaire à l'équation de raffinement car  $W_j \subset V_{j+1}$

$$\psi_j^m = \sum_{l \in M(j+1)} g_j^{m,l} \varphi_{j+1}^l \quad , \quad m \in M(j)$$

# Analyse multirésolution

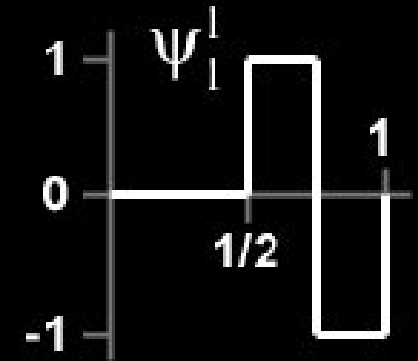
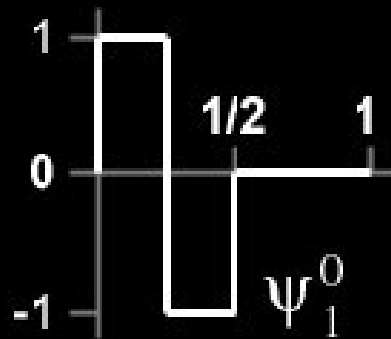
- Exemple des fonctions constantes par morceaux

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2] \\ -1, & x \in [1/2, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases} \quad \text{Ondelette de Haar}$$

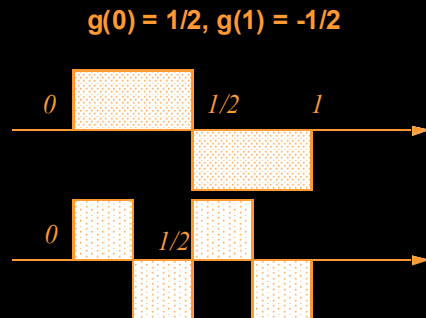
$$\psi_j^i(x) = \psi(2^j x - i), \quad i = 0, \dots, 2^j - 1$$

$$V_2 = V_1 \oplus W_1$$

$W_1$



- Filtres



$$\psi(x) = 2g(0)\phi(2t) - 2g(1)\phi(2t - 1)$$

- Une fonction d'échelle de niveau  $j+1$  peut s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions d'échelle et d'ondelettes plus grossières (niveau  $j$ )

$$\varphi_{j+1}^l = \sum_{k \in K(j)} \tilde{h}_j^{k,l} \varphi_j^k + \sum_{m \in M(j)} \tilde{g}_j^{m,l} \psi_j^m, \quad l \in K(j+1)$$

- Au final une fonction  $f \in V_n$  peut s'écrire

$$f = \sum_{k \in K(0)} a_0^k \varphi_0^k + \sum_{j=0}^n \sum_{m \in M(j)} d_j^m \psi_j^m$$

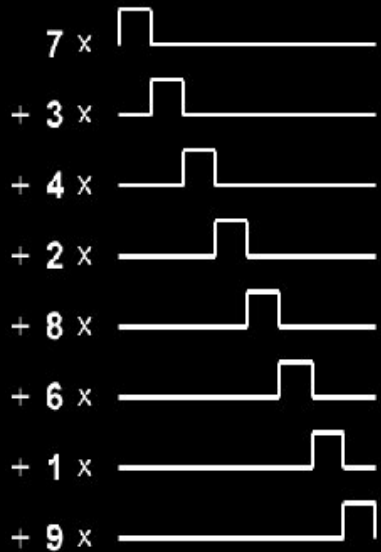
- Dans le cas fini, la transformée par ondelettes se résume à un *filtrage* ou une *convolution* (notation matricielle)

# Analyse multirésolution

- Exemple des fonctions constantes par morceaux

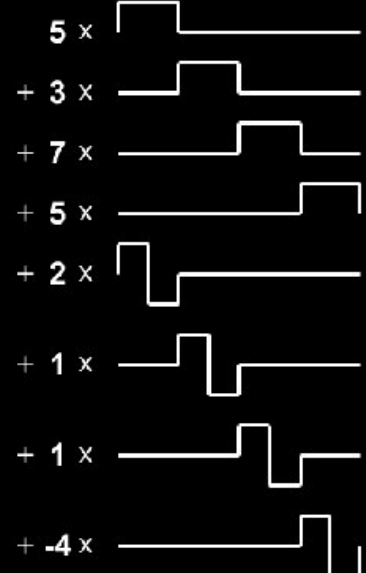
7 3 4 2 8 6 1 9

$V_3$



$V_2$

$W_2$



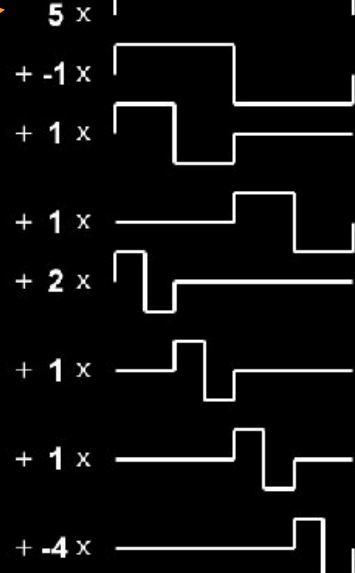
$V_1$

$W_1$



$V_0$

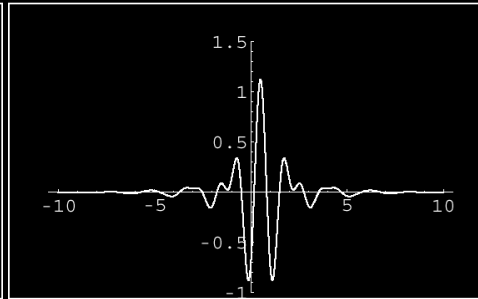
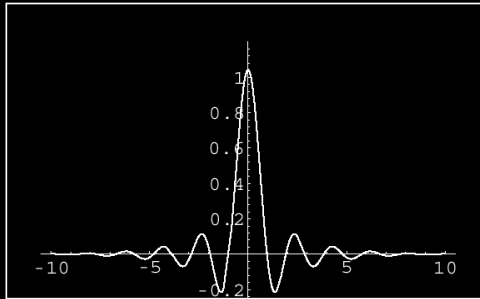
$W_0$



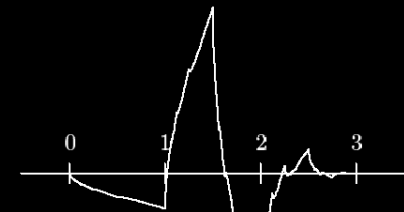
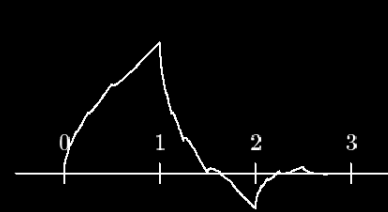


# Analyse multirésolution

- Il existe de nombreuses familles d'ondelettes



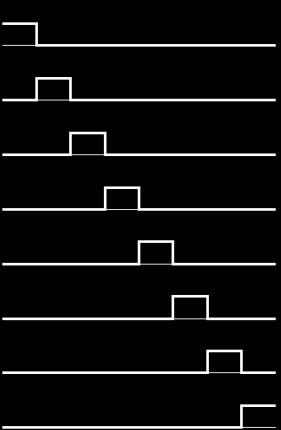
Meyer



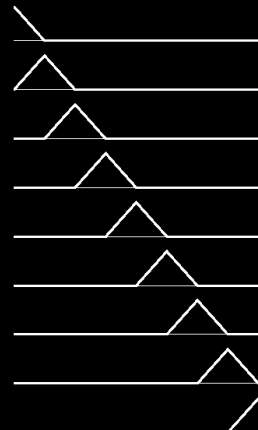
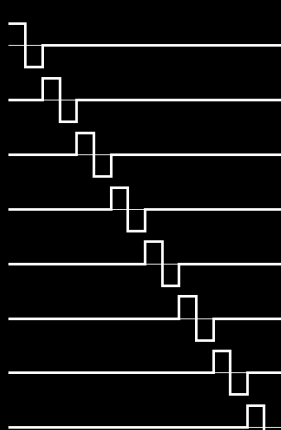
$\phi$

$\psi$

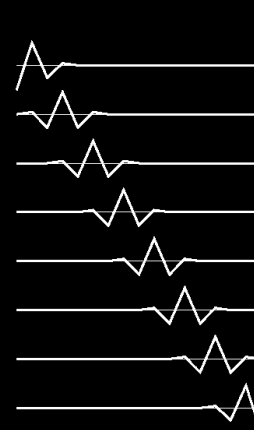
Daubechies



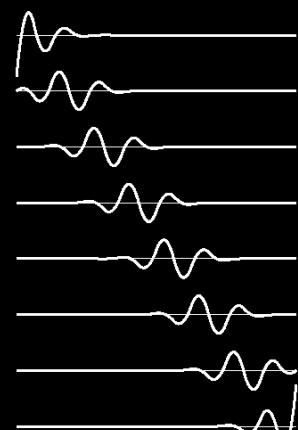
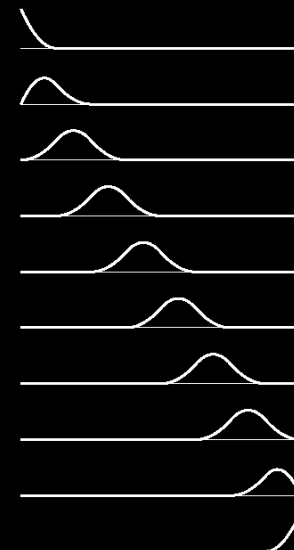
Haar



Bspline linéaire



Bspline quadratique



# Processus d'analyse/synthèse

- Etape de la transformée ou du *processus d'analyse*

$$a_j^k = \sum_{l \in K(j)} \tilde{h}_j^{k,l} a_{j+1}^l$$

$$d_j^m = \sum_{l \in M(j)} \tilde{g}_j^{m,l} a_{j+1}^l$$

- Le filtre défini par les  $\tilde{h}_i$  est un filtre *passé-bas* encodant les approximations du signal (basses fréquences)
- Le filtre défini par les  $\tilde{g}_i$  est un filtre *passé-haut* encodant les détails du signal (hautes fréquences)
- Etape de la transformée inverse ou du *processus de synthèse*

$$a_{j+1}^l = \sum_{k \in K(j)} h_j^{k,l} a_j^k + \sum_{m \in M(j)} g_j^{m,l} d_j^m$$

$$\Phi_j(x) = [\varphi_j^0(x), \dots, \varphi_j^n(x)]$$

$$\Psi_j(x) = [\psi_j^0(x), \dots, \psi_j^m(x)]$$

Equations de raffinement

$$\Phi_{j-1}(x) = \Phi_j(x)H_j$$

$$\Psi_{j-1}(x) = \Phi_j(x)G_j$$

$$[\Phi_{j-1}(x)|\Psi_{j-1}(x)] = \Phi_j(x)[H_j|G_j]$$

Analyse

$$A_{j-1} = \tilde{H}_j A_j$$

$$D_{j-1} = \tilde{G}_j D_j$$

Haar

$$H^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

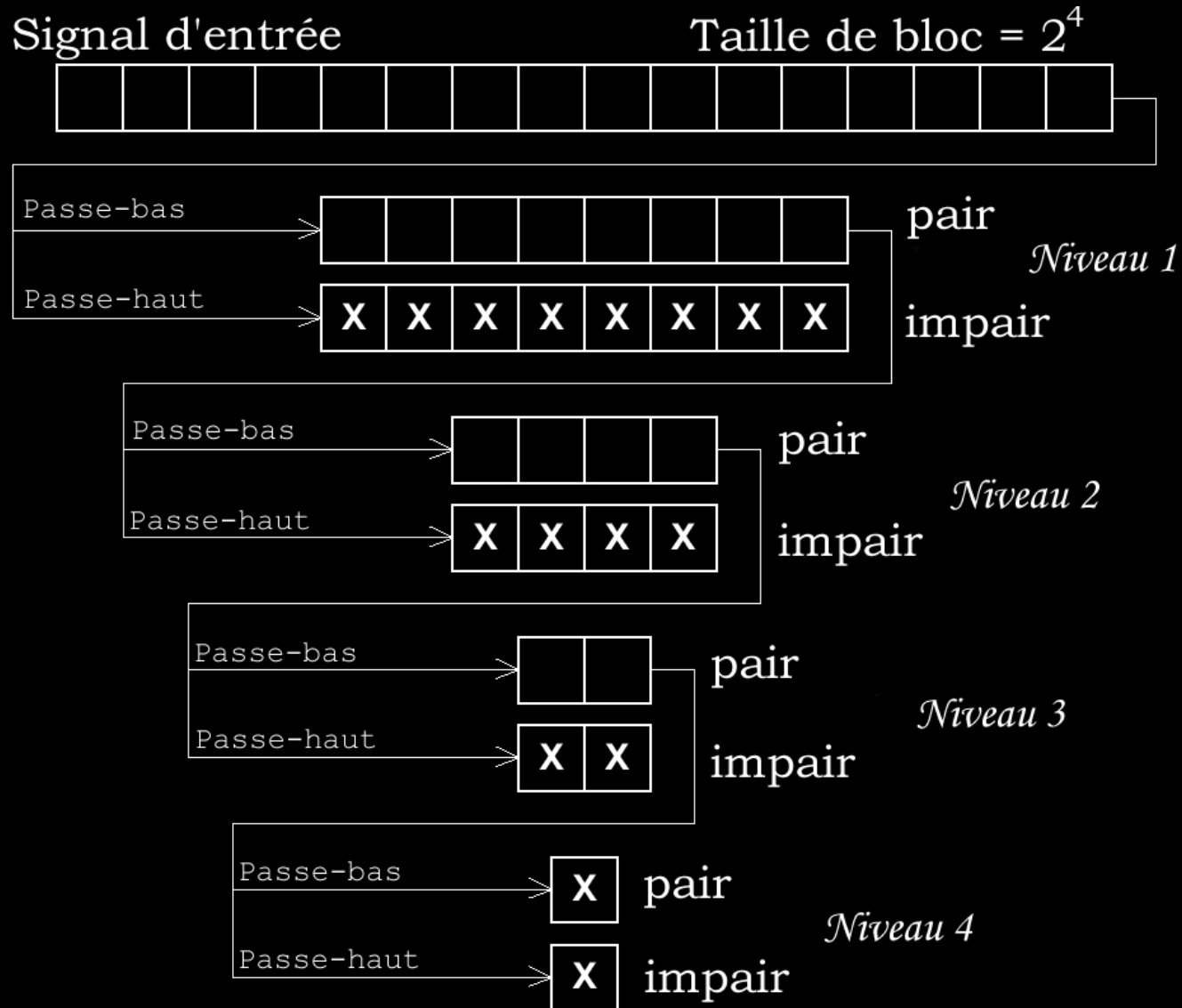
Synthèse

$$A_j = H_j A_{j-1} + G_j D_{j-1}$$

$$\tilde{H}^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G}^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

# Transformée rapide



Aussi appelé algorithme pyramidal de Mallat ou transformée par banque de filtres

# Caractéristiques d'une ondelette

- Moment = représentation des fonctions m-dérivables

$$m_i = \langle f | x^i \rangle = \int f x^i dx, i = 0, \dots, n-1$$

- En général moments  $\sim$  capacité de compression  $\sim$  complexité
- Symétrie/Régularité
- Expression analytique
- Support compact  $\Rightarrow$  filtres courts  $\Rightarrow$  transformée rapide
- Orthogonalité – Semiorthogonalité – Biorthogonalité  $\forall j, k, l$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \varphi_j^k | \varphi_j^l \rangle = \delta_{k,l} \\ \langle \psi_j^k | \psi_j^l \rangle = \delta_{k,l} \\ \langle \varphi_j^k | \psi_j^l \rangle = 0 \end{array} \right. \quad \langle \varphi_j^k | \psi_j^l \rangle = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle \varphi_j^k | \tilde{\psi}_j^l \rangle = 0 \\ \langle \psi_j^k | \tilde{\varphi}_j^l \rangle = 0 \end{array} \right.$$

Chaque atome encode une information non représentable par un autre  $\Rightarrow$  décomposition unique

$$\tilde{h} = h^T$$

$$\tilde{g} = g^T$$

Filtres orthogonaux  $\Rightarrow$  simplification

- Construction / certaines propriétés : *Lifting Scheme*

$$f(x) = \sum_{i=1}^m c_i u_i(x)$$

**Amplitude  
des coefficients  
d'ondelettes**



**Importance dans  
la représentation  
du signal**

1. Ordonnancement des coefficients d'ondelettes, permutation  $\pi$

$$\|c_{\pi(1)}\| \geq \dots \geq \|c_{\pi(m)}\| \quad f(x) = \sum_{i=1}^m c_{\pi(i)} u_{\pi(i)}(x)$$

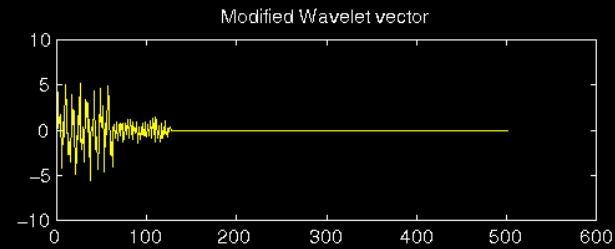
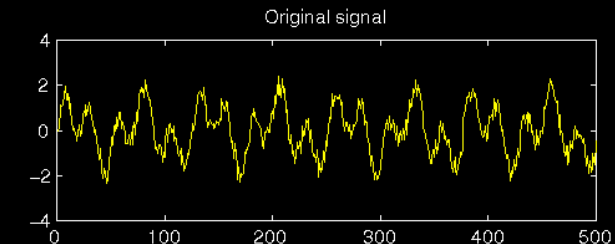
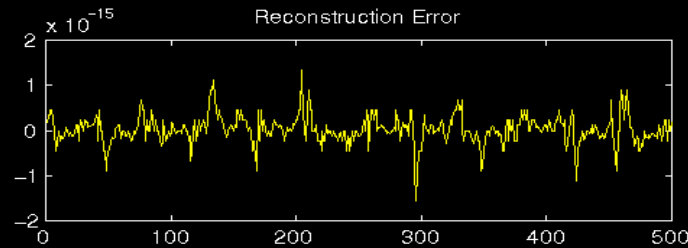
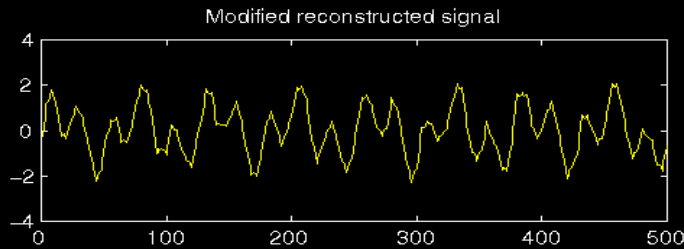
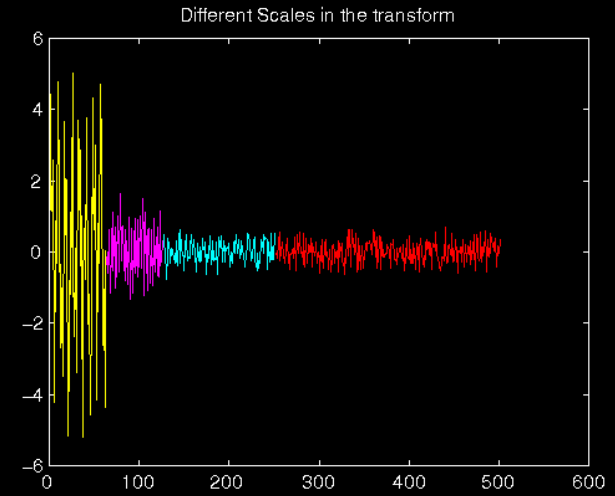
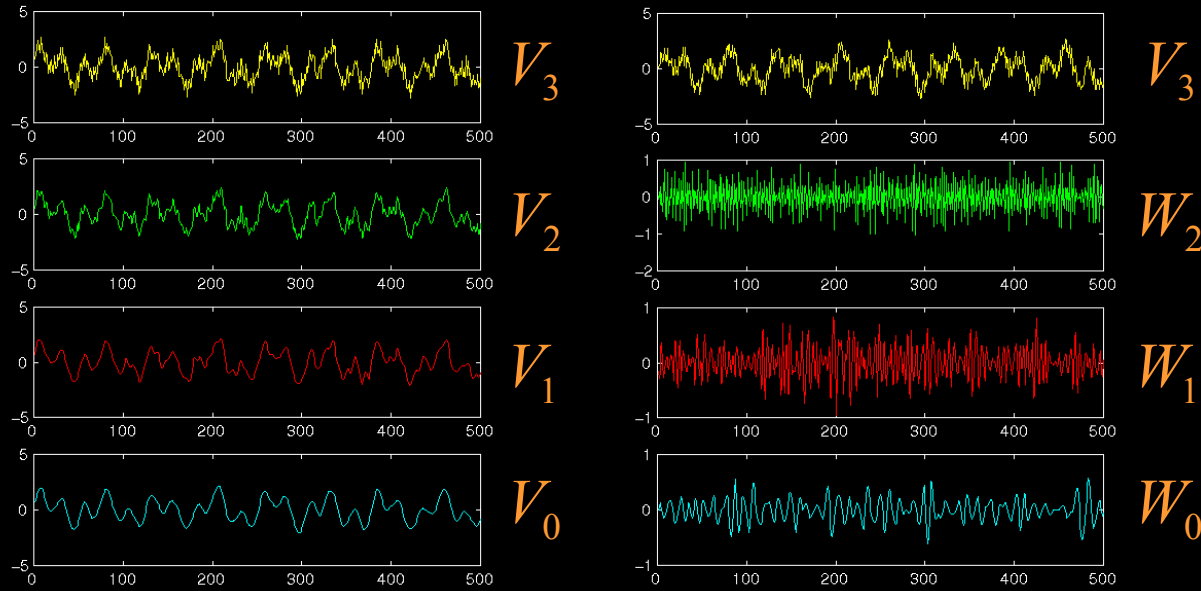
2. Définition d'un *seuil*  $\mathcal{E} \iff$  définition d'un indice  $\hat{m}$

$$\sum_{i=\hat{m}+1}^m \|c_{\pi(i)}\|^2 \leq \mathcal{E}^2 \quad \hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{\hat{m}} c_{\pi(i)} u_{\pi(i)}(x)$$

3. Suppression des coefficients inférieurs au seuil ( $\sim 0$ )
4. Calcul de l'erreur (compression avec perte)

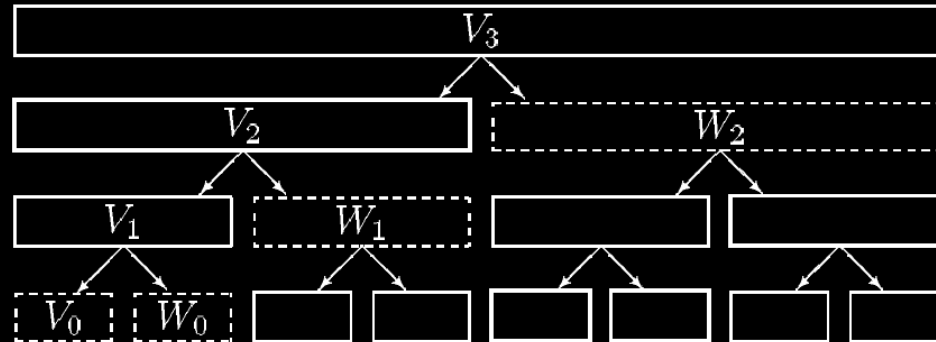
$$\|f - \hat{f}\|^2 = \sum_{i=\hat{m}}^m \|c_{\pi(i)}\|^2$$

# Exemple de compression

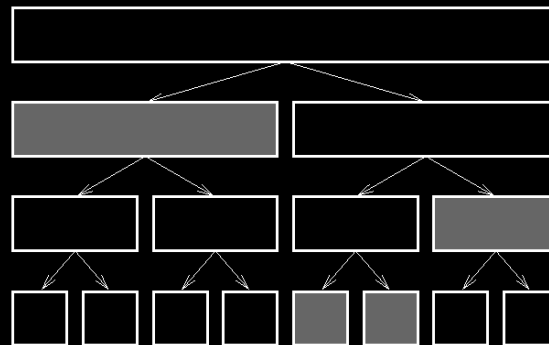


# Les paquets d'ondelettes

- Décomposition des  $V_j$  et des  $W_j$



- Choix de la base optimale pour représenter le signal
- Estimation d'après une fonction de coût

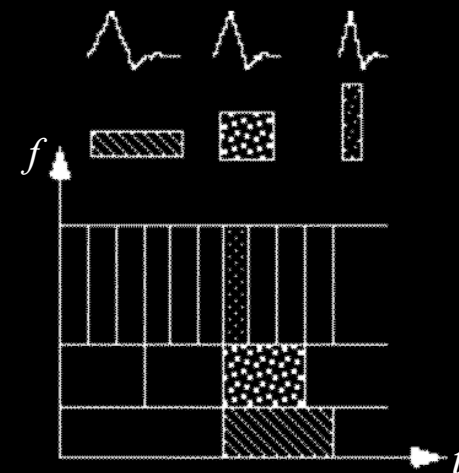
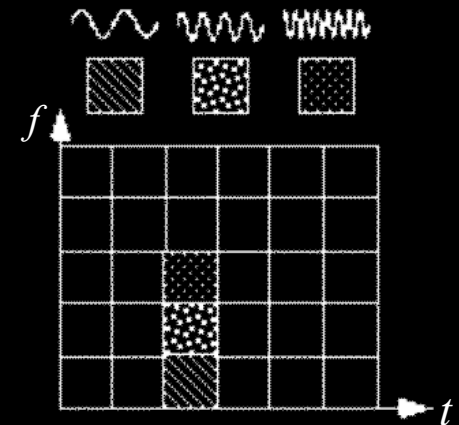


- Augmente la complexité



# Comparaison avec Fourier

- Fourier
  - atomes à support global
  - sinusoïde progression arithmétique en fréquences
  - analyse en fréquence
  - complexité  $O(n \log n)$
- Fourier + fenêtrage
  - atomes à support local
  - analyse temps/fréquence (largeur de fenêtre fixe)
- Ondelettes
  - atomes à support local
  - forme indépendante de l'échelle
  - fréquences en progression géométrique
  - analyse temps/fréquence (largeur de fenêtre variable)
  - complexité  $O(n)$



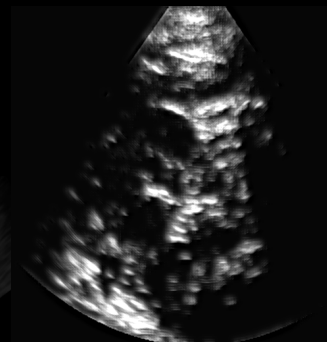
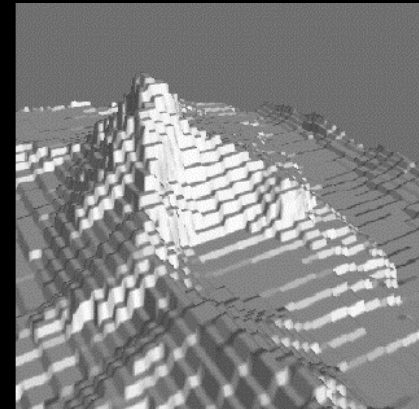
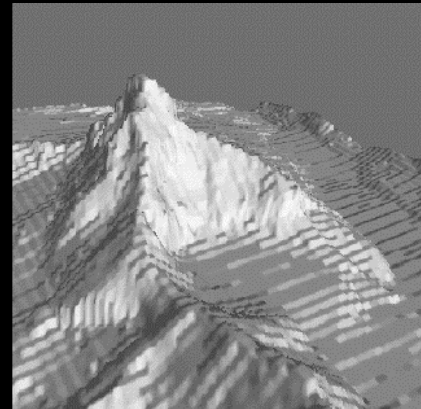
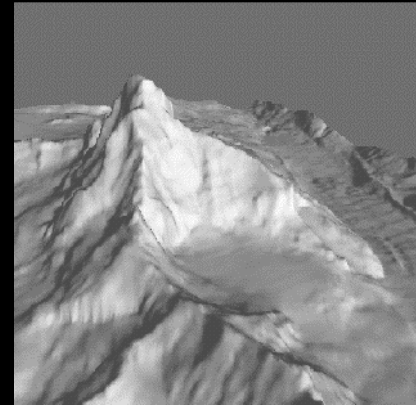
# *Applications générales*

- Astrophysique
- Physique quantique
- Analyse fractale
- Analyse des turbulences/chaos
- Débruitage
- Analyse de la parole/acoustique
- Analyse du système visuel/auditif
- Analyse sismologique

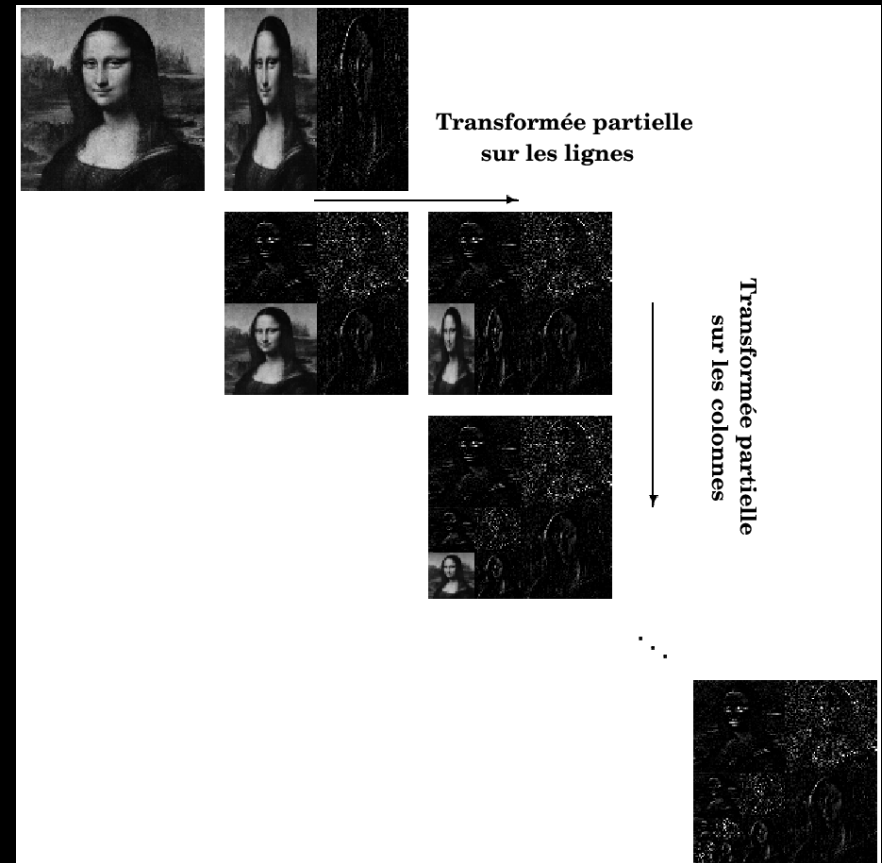
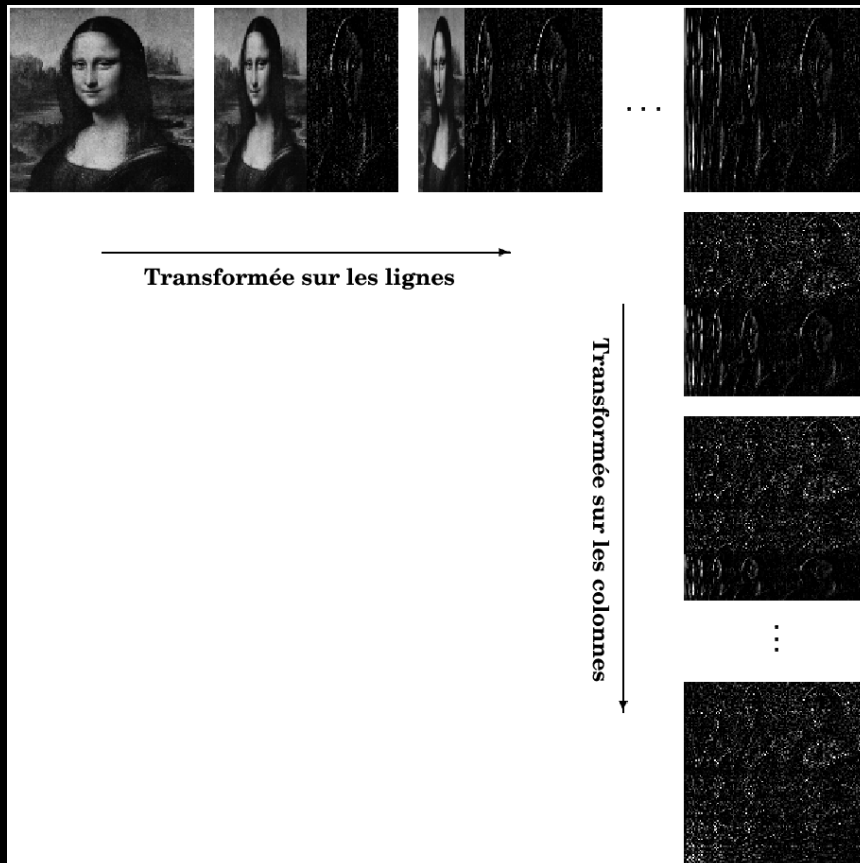


# Applications en informatique graphique

- Compression d'images
  - JPEG 2000
  - FBI
- Analyse d'image
  - suppression de bruit
  - détection des contours
  - reconnaissance
- Compression vidéo
- Maillages (édition/compression)
- Rendu volumique
- Rendu réaliste (radiosité, BRDF)
- Imagerie médicale
- Et beaucoup d'autres choses !



- 2D  $\Rightarrow$  deux décompositions possibles
  - standard = composition de transformées
  - non-standard = transformée multidimensionnelle



## Fonctions de base multidimensionnelles

	$\varphi_0$	$\psi_0$	$\psi_1^0$	$\psi_1^1$
$\varphi_0$				
$\psi_0$				
$\psi_1^0$				
$\psi_1^1$				

*standard*

$$\begin{cases} \varphi\varphi(x, y) \equiv \varphi(x)\varphi(y) \\ \varphi\psi(x, y) \equiv \varphi(x)\psi(y) \\ \psi\varphi(x, y) \equiv \psi(x)\varphi(y) \\ \psi\psi(x, y) \equiv \psi(x)\psi(y) \end{cases}$$

	$\varphi_0$	$\psi_0$	$\varphi_1^0$	$\varphi_1^1$	$\psi_1^0$	$\psi_1^1$
$\varphi_0$						
$\psi_0$						
$\varphi_1^0$						
$\varphi_1^1$						
$\psi_1^0$						
$\psi_1^1$						

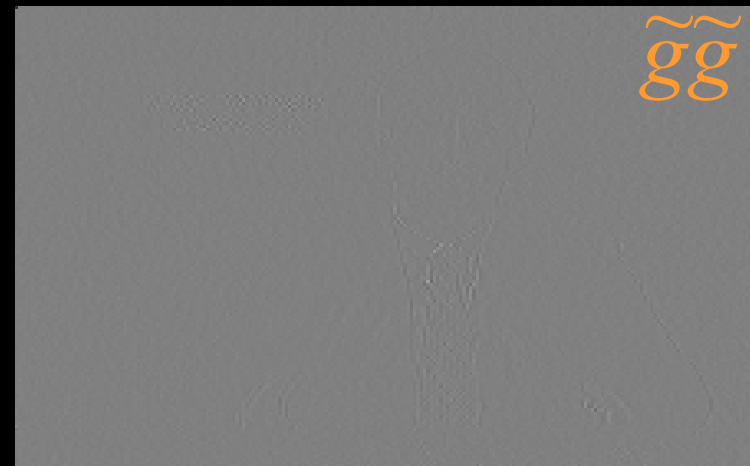
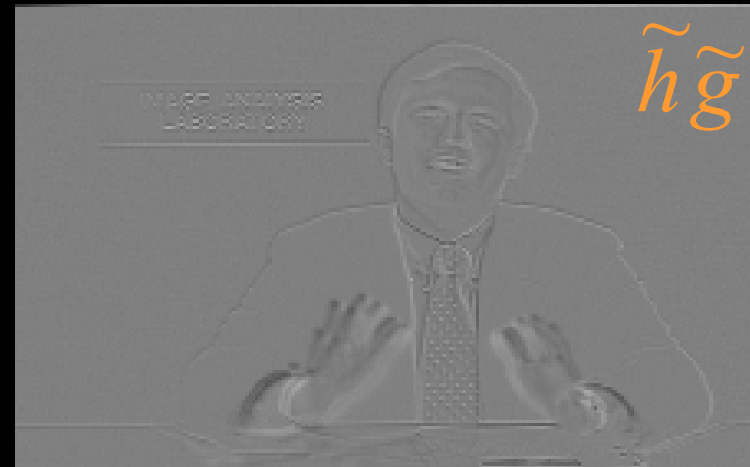
*non-standard*

mise en place simple  
+ coûteuse  
supports variables

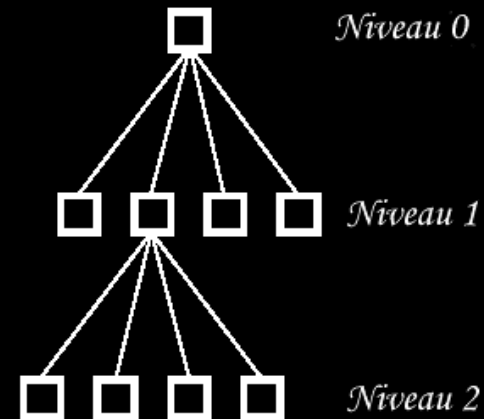
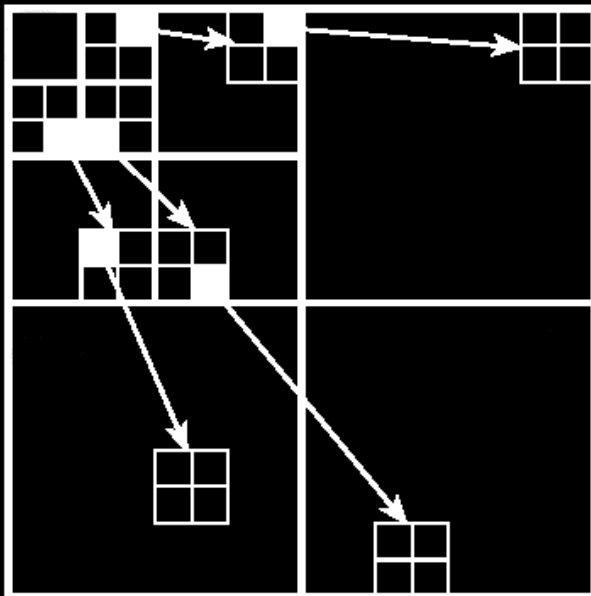
$$\frac{8}{3}(n^2 - 1) > 4(n^2 - n)$$

mise en place complexe  
+ rapide  
supports carrés

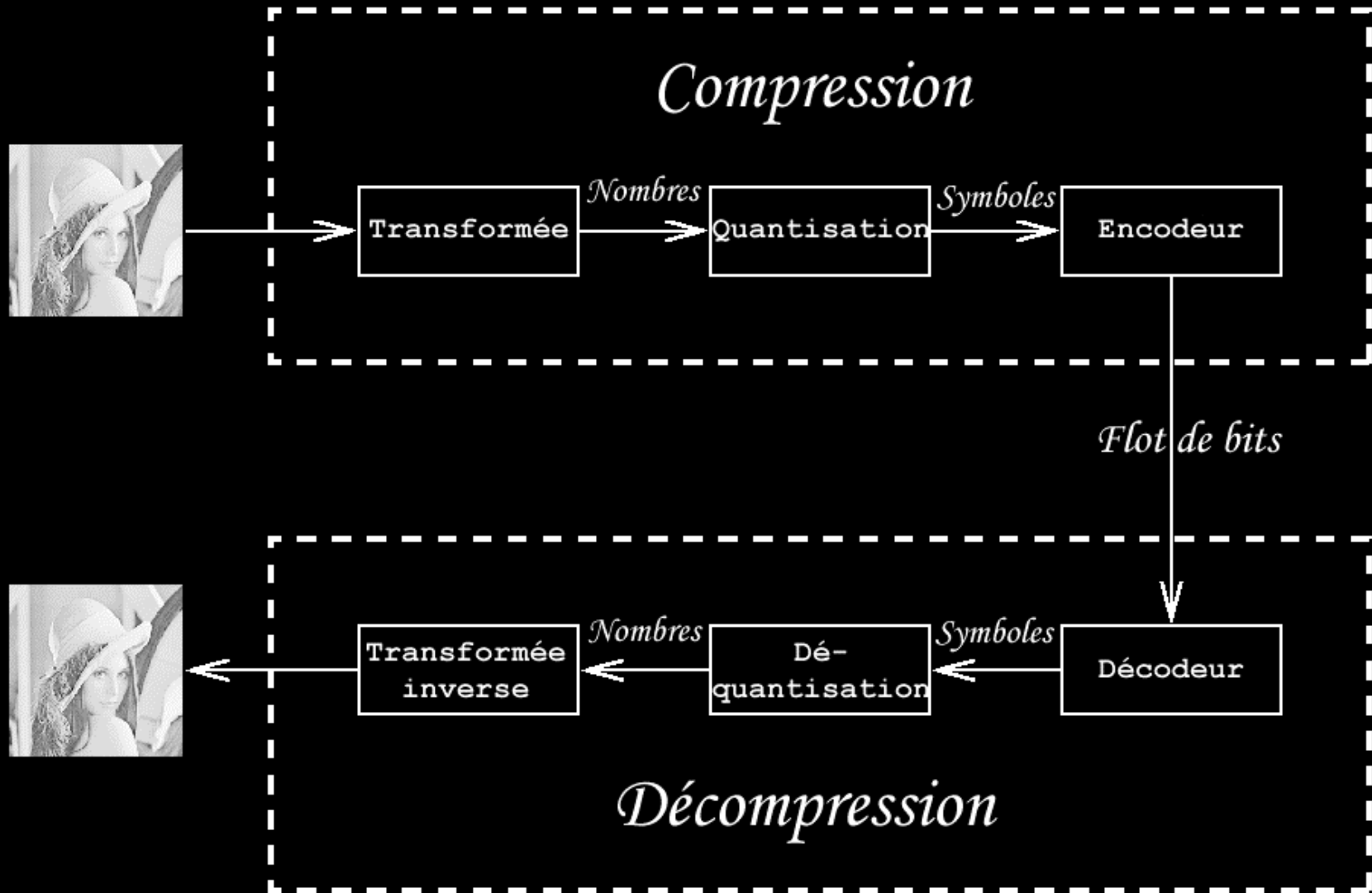
# Images



- Structure adaptée à la représentation *creuse* fournie par les ondelettes
- Sous forme d'arbre
  - 1D : binaire
  - 2D : quaternaire
- Suppression des branches « vides »



# Systeme général





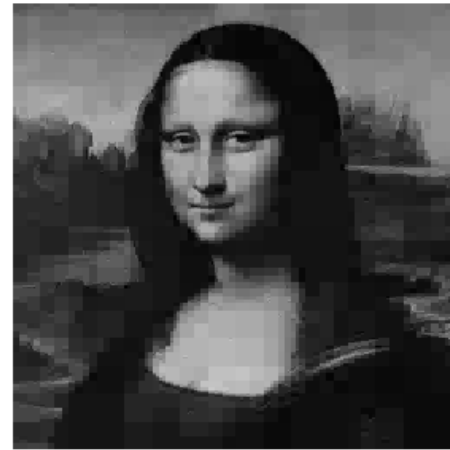
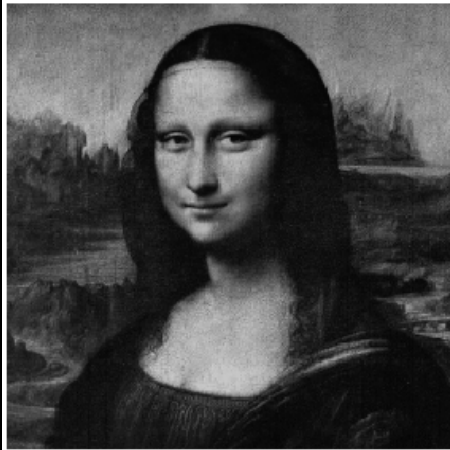


image originale

21% - 5%

4% - 10%

1% - 15%



contour = maxima à toutes les échelles

- Base de donnée d'empreintes digitales
  - 500 points par inch => 1 empreinte ~ 10Mo
  - OK j'ai un gros disque dur !
  - Oui mais moi j'ai 200,000,000 d'empreintes !



ondelettes



JPEG standard

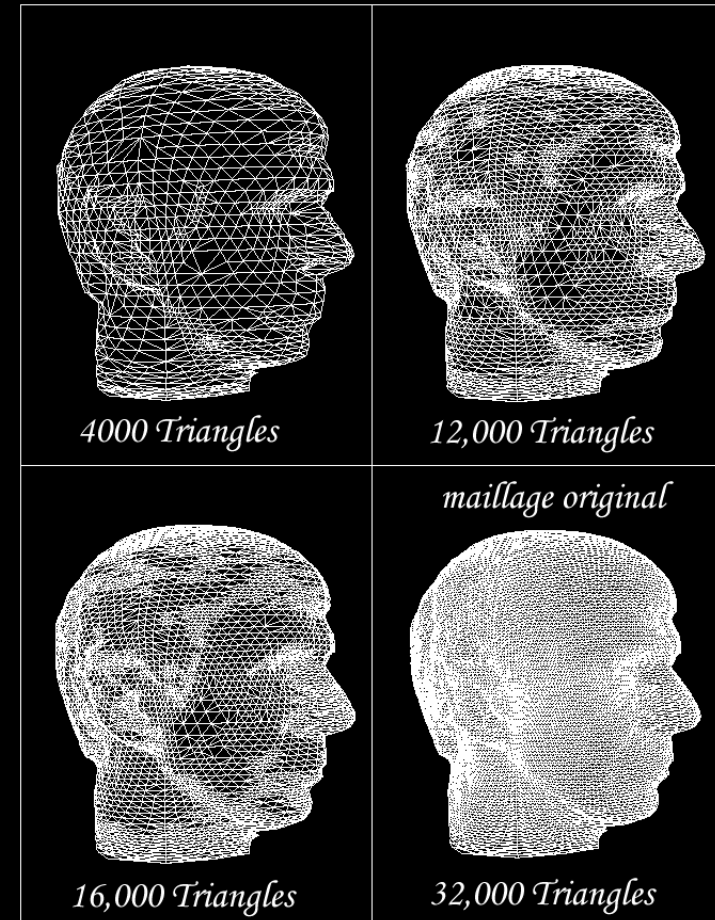
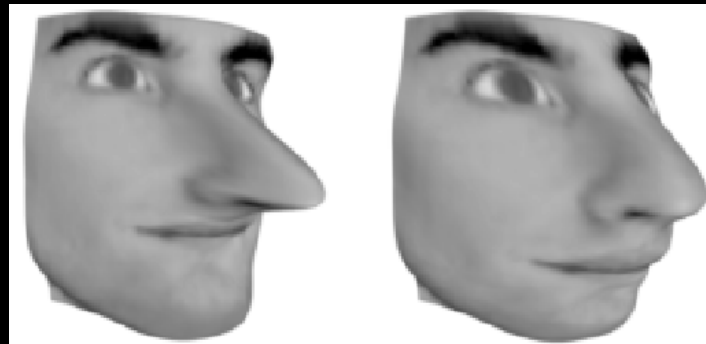
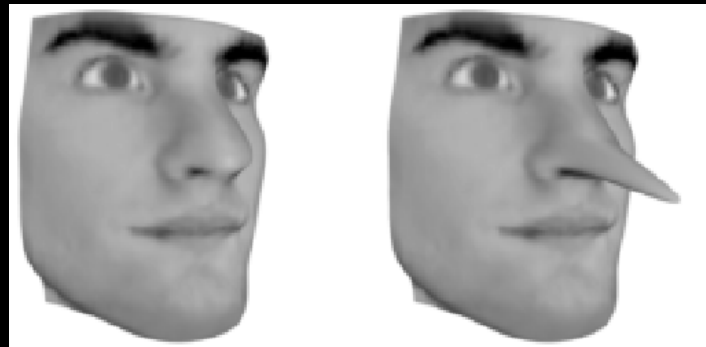
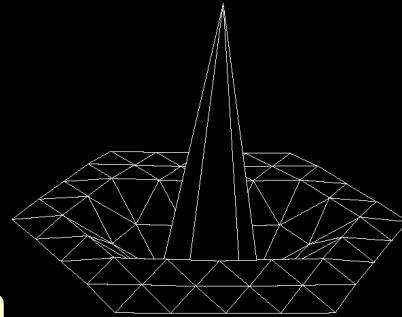
- Compression par ondelettes
  - Filtres Daubechies 9/7
- Evite les écueils de l'ancien standard
  - Pas de découpage en blocs constants 8x8
  - Décodage progressif
  - Régions d'intérêt
  - Encode le Gamma/Copyright
- Pourquoi encore méconnu
  - Payant



# *JPEG 2000*



- Ondelettes définies sur les triangles ou les sommets
- Compression
- Edition multirésolution



original

résolution  
fine

4,000 Triangles

12,000 Triangles

maillage original

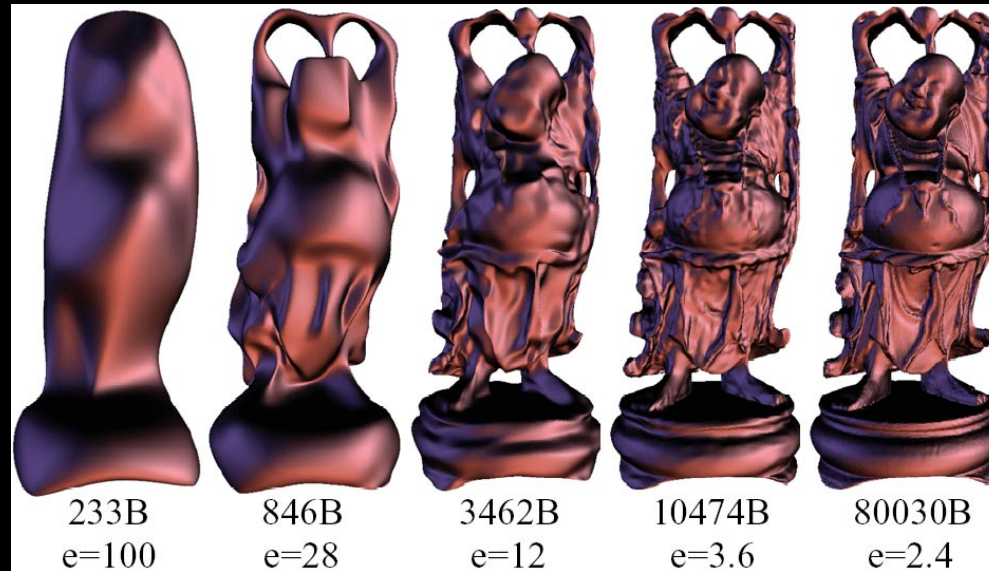
résolution  
moyenne

résolution  
grossière

16,000 Triangles

32,000 Triangles

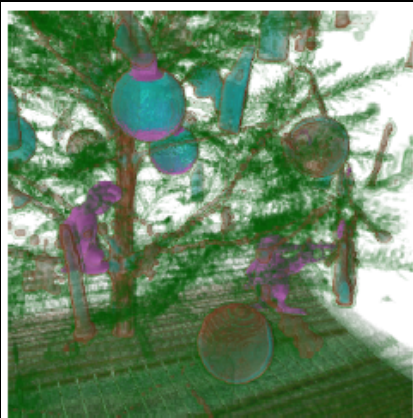
- Transmission progressive (web)



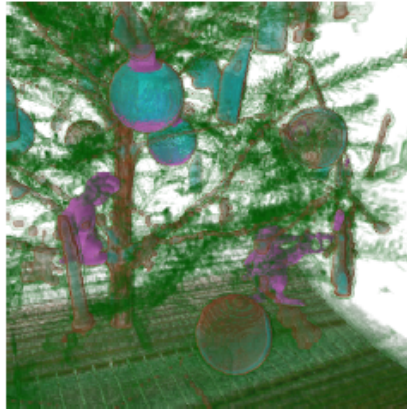
- *Level Of Detail (LOD) ~ Multirésolution*



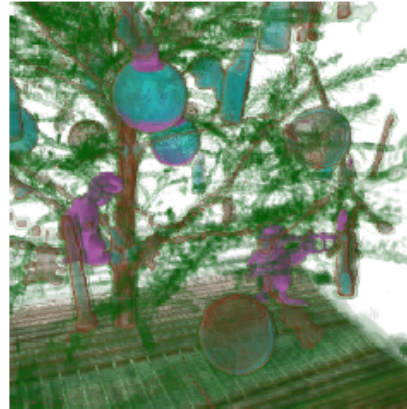
- Jeux de données très importants
  - place disque/mémoire ( $512^3 \Rightarrow$  au moins 128Mo)
  - LOD
  - coût d’affichage (software)



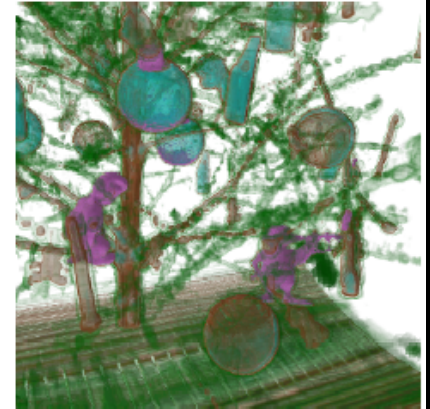
données originales



8.8:1 – 3.3fps

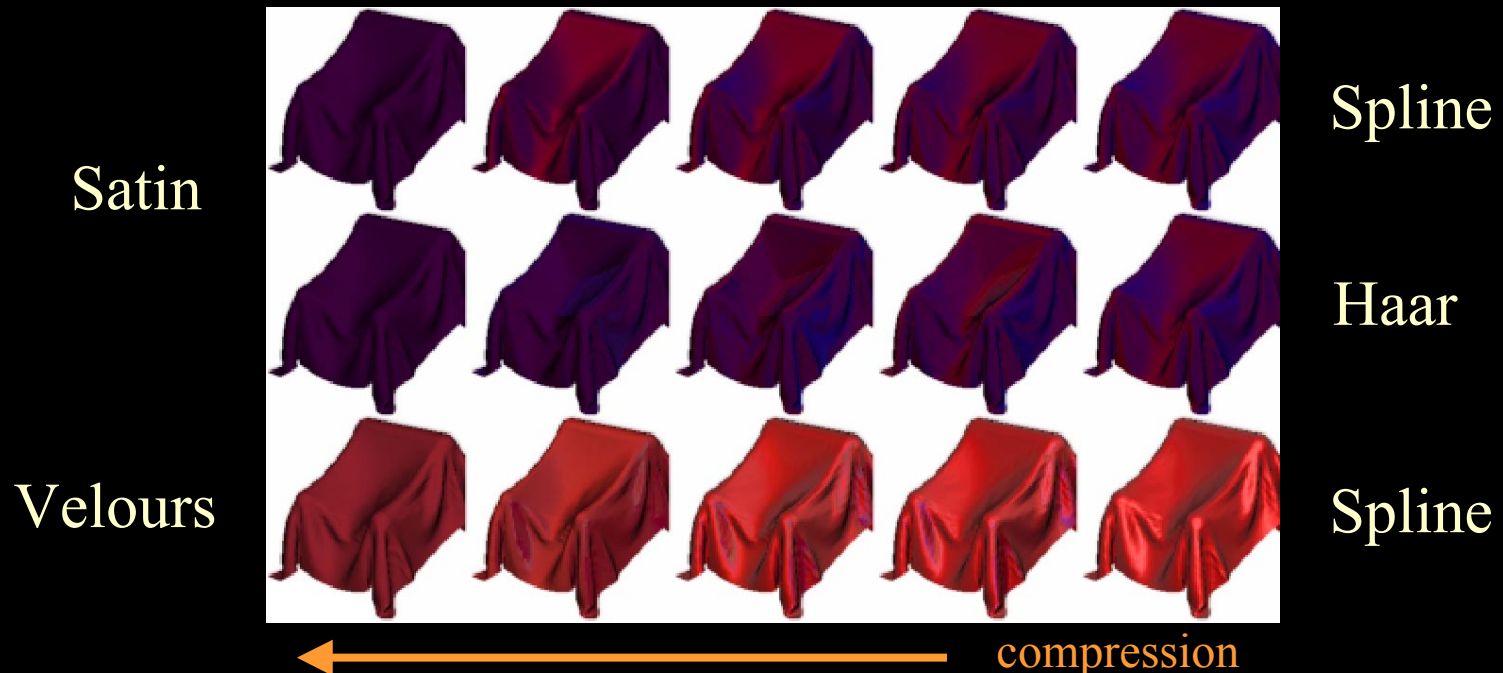
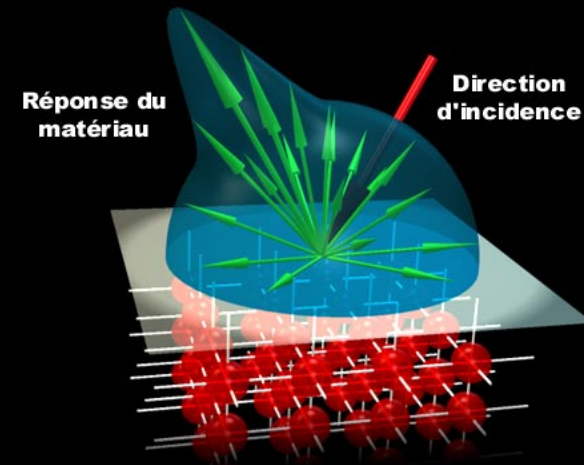


66:1 – 6.6fps



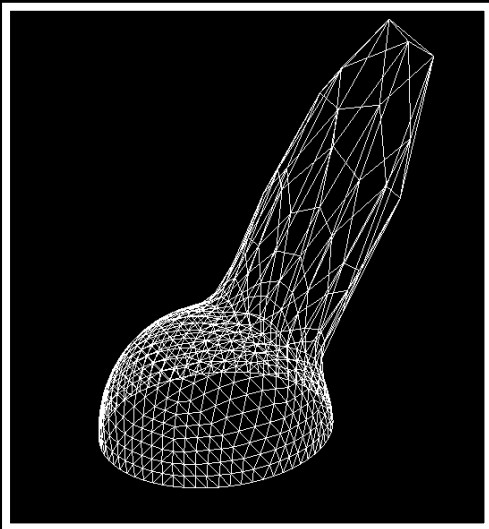
195:1 – 9.5fps

- Compression de données physiques
  - Spectres
  - BRDFs
  - Emissions
- Optimise la résolution de l'équation du rendu
  - Inversion numérique rapide

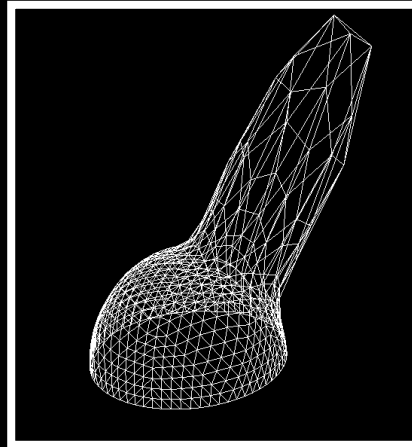




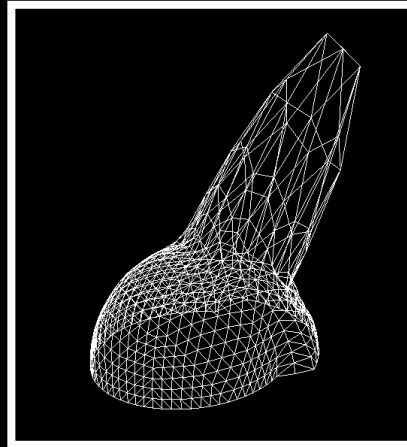
# *Rendu réaliste*



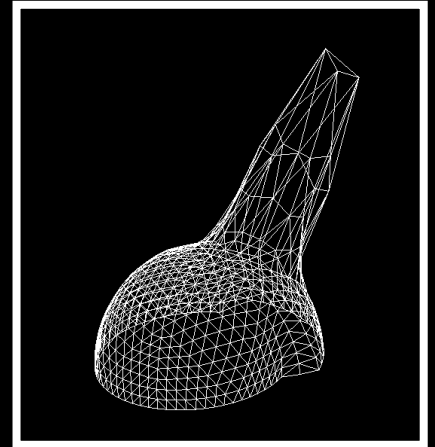
BRDF  
originale



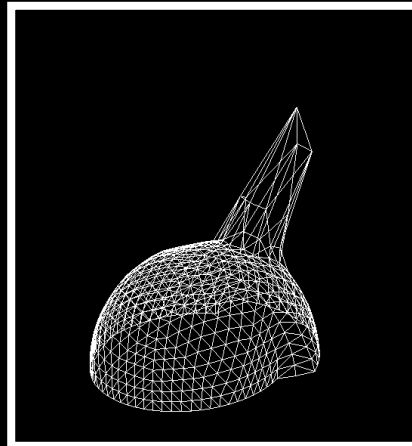
90%  
0.0027



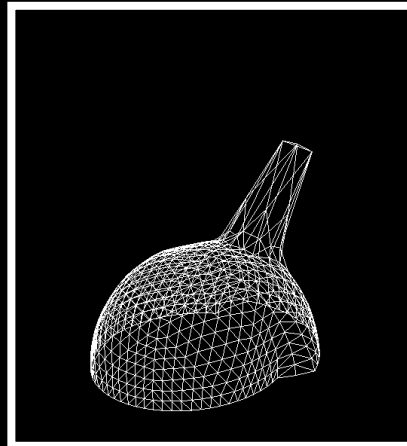
95%  
0.016



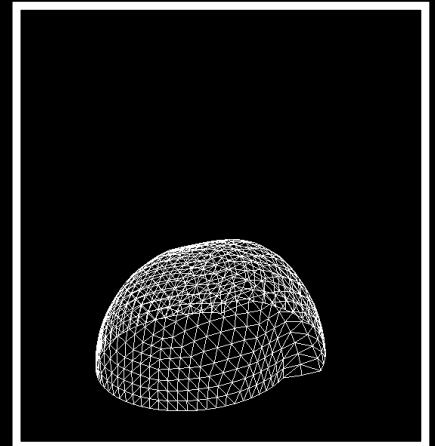
97%  
0.021



98%  
0.03



99%  
0.037



100%  
0.042

- Projection sur une base d'ondelettes
  - luminance
  - radiosité



- Lire
  - « Ten Lectures on Wavelets » , Ingrid Daubechies
  - « A Wavelet Tour of Signal Processing » , Stéphane Mallat
  - « Wavelets for Computer Graphics » , Eric J. Stollnitz
- Consulter
  - <http://www.wavelet.org>
  - <http://www.ondelette.com>
  - <http://www.amara.com/current/wavelet.html>
  - <http://stat.stanford.edu/~wavelab>
  - <http://www.multires.caltech.edu/>
  - <http://www.cs.nyu.edu/cs/faculty/mallat/>
  - <http://faculty.gvsu.edu/aboufadi/web/dw.htm>